Раздел 2. Тема 1. Занятие 2.

Замена переменных в двойном интеграле:
если непрерывно дифференцируемые функции

$$x = x(u,v) \quad , y = y(u,v)$$

осуществляют взаимно однозначное отображение ограниченной и замкнутой области $\mathcal{D}$ плоскости Oxy на область $\mathcal{D}'$ плоскости Ouv, и якобиан

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

сохраняет постоянный знак на $\mathcal{D}$ за исключением, быть может, множества меры нуль, то справедлива формула

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}'} f(x(u,v), y(u,v))\,|I|\,du\,dv$$

Полярные координаты: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

Тогда справедлива формула:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

Обобщенные полярные координаты:

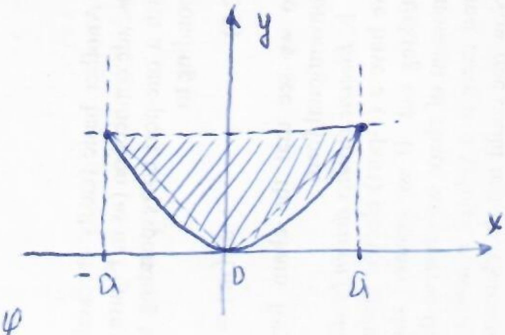
$$\begin{cases} x = ar\cos^{\alpha}\varphi \\ y = br\sin^{\alpha}\varphi \end{cases}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$I = \alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\,\sin^{\alpha-1}\varphi.$$

№3941, 3945, 3953, 3954, 3957, 3963, 3967, 3972

№3941 Расставить пределы интегрирования $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$, где

$$\Omega = \left\{(x,y):\ -a\le x\le a,\ \frac{x^2}{a}\le y\le a\right\},\ a>0.$$



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases},\ 0\le\varphi\le 2\pi. \Rightarrow$$

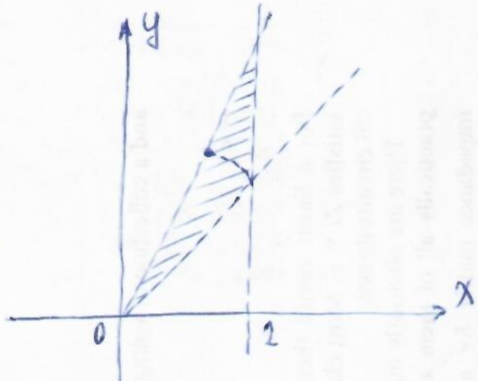
$$\begin{cases} 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4} \\ 0\le r\le \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4} \\ 0\le r\le\frac{a}{\sin\varphi} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\pi \\ 0\le r\le\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \end{cases}$$

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr +$$

$$+ \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$$

№3945. Расставить пределы интегрирования: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$

$$\begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x\le y\le\sqrt{3}x \end{cases},\ \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} x=y \Rightarrow tg\,\varphi = 1 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4} \\ \sqrt{3}x = y \Rightarrow tg\,\varphi=\sqrt{3} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3} \\ 0\le r\le\frac{2}{\cos\varphi} \end{cases} \Rightarrow$$

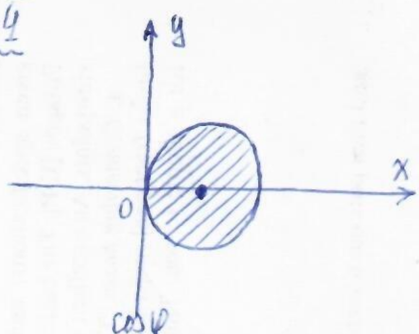
$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} r f(r)\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} r f(r)\,d\varphi + \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{4} dr \int\limits_{\arccos\frac{2}{r}}^{\frac{\pi}{3}} r f(r)\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r f(r)\,dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi + \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{4} r f(r)\,dr \int\limits_{\arccos\frac{2}{r}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{12}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r f(r)\,dr + \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{4} \left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{2}{r}\right) r f(r)\,dr.$$

№3953 Заменить двойной интеграл однократным $\iint\limits_{x^2+y^2\le x} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$

$$x^2+y^2=x \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\le\frac{1}{4}$$



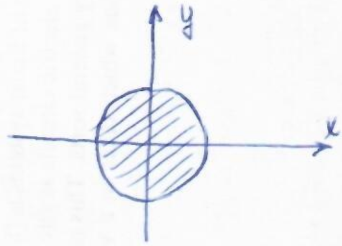
$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le r\le\cos\varphi \end{cases}, \text{ ибо}$$

$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le x} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi} r\,f(\operatorname{tg}\varphi)\,dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi\int_0^{\cos\varphi} r\,dr=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi.$$

№3954 Вычислить $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$



$$\begin{cases} 0\le\varphi\le2\pi \\ 0\le r\le a \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^2dr=2\pi\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^a=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

№3957. Изменить пределы интегрирования: $\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)\,dy$, $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$.

$$\begin{cases} u=x \\ v=\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=u \\ y=uv \end{cases} \Rightarrow I=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix}=u.$$

$a\le u\le b$

$$\alpha x\le y\le\beta x \Rightarrow \alpha u\le uv\le\beta u \Rightarrow \alpha\le v\le\beta \Rightarrow \begin{cases} a\le u\le b \\ \alpha\le v\le\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)\,dy=\int_a^b du\int_\alpha^\beta u\,f(u,uv)\,dv=\int_a^b u\,du\int_\alpha^\beta f(u,uv)\,dv.$$

№3963 Свести двойной интеграл к однократному: $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)\,dxdy$.

Пусть $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} x=r\cos(\varphi+\alpha) \\ y=r\sin(\varphi+\alpha) \end{cases}$

$$\begin{cases} 0\le\varphi\le2\pi. \\ 0\le r\le1 \end{cases} \Rightarrow$$

3963 Произведя замену переменных, заменить двукратный интеграл однократным:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)\,dx\,dy \quad , a^2+b^2\ne 0.$$

Выполним замену переменных:

$$\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} = u \ , \ \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}} = v \ \Rightarrow$$

$$x = \frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}} \ , \ y = \frac{b\cdot u-av}{\sqrt{a^2+b^2}} \ \Rightarrow$$

$$x^2+y^2 = u^2+v^2 \le 1.$$

Значит круг переходит в круг и $|I| = 1$.

Тогда

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)\,dx\,dy = \iint\limits_{u^2+v^2\le 1} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\,u+c\right)du\,dv =$$

$$= \int_{-1}^{1} du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\,u+c\right)dv = \int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2}\,u+c\right) v \Big|_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} du =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\, f\left(\sqrt{a^2+b^2}\cdot u+c\right)du$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r f(ar\cos(\varphi+\alpha) + br\sin(\varphi+\alpha)+c)\,dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r f(\sqrt{a^2+b^2}\, r\cos\varphi + c)\,dr = I$$

Сделаем обратную замену переменных: $\begin{cases} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le \sqrt{1-u^2} \end{cases} \Rightarrow I = 2\int_{-1}^{1} du \int_0^{\sqrt{1-u^2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\,u + c)\,dv =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\, f(\sqrt{a^2+b^2}\,u + c)\,du.$$

№3967 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, где область Ω ограничена эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

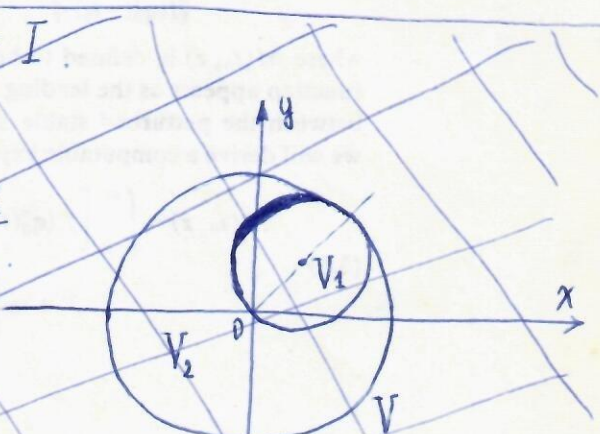
Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases} \Rightarrow I = abr. \Rightarrow$$

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr\sqrt{1-r^2}\,dr = 2\pi ab \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr =$$

$$= |u = r^2| = \pi ab \int_0^1 \sqrt{1-u}\,du = -\frac{2}{3}\pi ab\,(1-u)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi ab.$$

№3972 Вычислить $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt2} - x^2 - y^2\right| dxdy = I.$



$$\frac{x+y}{\sqrt2} - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2\sqrt2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\sqrt2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

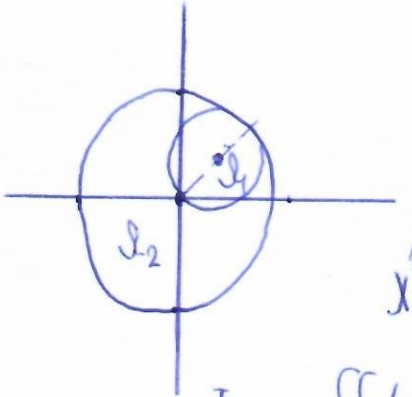
$$\begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt2} - x^2 - y^2 > 0 & \text{для } (x,y) \in V_1 \\ \frac{x+y}{\sqrt2} - x^2 - y^2 < 0 & \text{для } (x,y) \in V_2 \end{cases}, \text{ где } V = V_1 \cup V_2 \text{ и } V_1 \cap V_2 = \varnothing.$$

Имеем:

$$I = \iint\limits_{V_1} \left(\frac{x+y}{\sqrt2} - x^2 - y^2\right) dxdy - \iint\limits_{V_2} \left(\frac{x+y}{\sqrt2} - x^2 - y^2\right) dxdy =$$

(3972) Вычислить $I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt2} - x^2 - y^2 \right| dx\,dy$

Имеем $I = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left| x^2+y^2 - \frac{x+y}{\sqrt2} \right| dx\,dy$



$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$

на $\mathcal{D}_1$ $x^2+y^2 - \frac{x+y}{\sqrt2} \le 0$

на $\mathcal{D}_2$ $x^2+y^2 - \frac{x+y}{\sqrt2} \ge 0$

$x^2+y^2 - \frac{x+y}{\sqrt2} = 0 \Leftrightarrow r = \cos(\varphi - \frac{\pi}{4})$

$$I = -\iint\limits_{\mathcal{D}_1} \left(x^2+y^2 - \frac{x+y}{\sqrt2}\right) dx\,dy + \iint\limits_{\mathcal{D}_2} \left(x^2+y^2 - \frac{x+y}{\sqrt2}\right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(x^2+y^2 - \frac{x+y}{\sqrt2}\right) dx\,dy - 2\iint\limits_{\mathcal{D}_1} \left(x^2+y^2 - \frac{x+y}{\sqrt2}\right) dx\,dy = I_1 - 2I_2.$$

$$I_1 = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(x^2+y^2 - \frac{x+y}{\sqrt2}\right) dx\,dy = \left\{ \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}, I = r \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r^2 - \frac{1}{\sqrt2} r(\cos\varphi + \sin\varphi)\right) r\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r^3 - r^2\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})\right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3\,dr - \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \frac{\pi}{4})\,d\varphi}}_{0} \int_0^1 r^2\,dr = 2\pi \cdot \frac14 = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_2 = \iint\limits_{\mathcal{D}_1} \left(x^2+y^2 - \frac{x+y}{\sqrt2}\right) dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})} \left(r^2 - r\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})\right) r\,dr =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})} \left(r^3 - r^2\cos(\varphi - \frac{\pi}{4})\right) dr = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})} r^3\,dr - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(\varphi - \frac{\pi}{4})\,d\varphi \int_0^{\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})} r^2\,dr =$$

$$= \frac14 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^4(\varphi - \frac{\pi}{4})\,d\varphi - \frac13 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^4(\varphi - \frac{\pi}{4})\,d\varphi = -\frac{1}{12} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^4(\varphi - \frac{\pi}{4})\,d\varphi =$$

$$= \left\{ t = \varphi - \frac{\pi}{4} \right\} = -\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = -\frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)^2 dt =$$

$$= -\frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cancel{2\cos 2t}^{\,0} + \frac{1+\cancel{\cos 4t}^{\,0}}{2}\right) dt = -\frac{1}{\cancel{24}_{8}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{32}$$

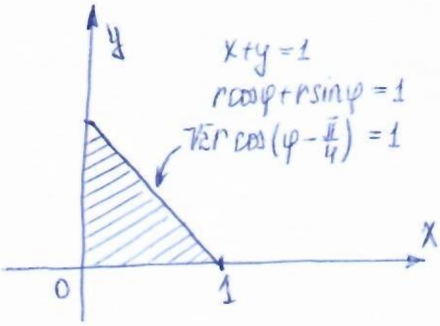
$$I = \frac{\pi}{2} - 2\left(-\frac{\pi}{32}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16} = \frac{9\pi}{16}.$$

Дома: №№ 3940, 3947, 3950, 3955, 3958, 3964, 3965, 3968.

№3940 Расставить пределы интегрирования: $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$, где

$$\mathcal{D}=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$$

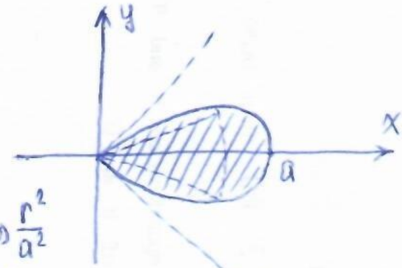
$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt2\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$$



№3947. Расставить пределы интегрирования в $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$, где область $\mathcal{D}$ ограничена линией

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\ x\ge 0$$

Имеем $r^2=a^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=a^2\cos2\varphi\ge 0$ после перехода к полярным координатам $\Rightarrow \cos2\varphi\ge0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}. \Rightarrow$



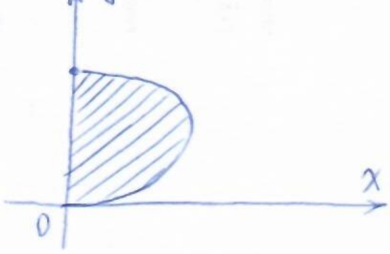
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4} \\ 0\le r\le a\sqrt{\cos2\varphi} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr=\int\limits_0^a dr\int\limits_{-\frac12\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac12\arccos\frac{r^2}{a^2}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr=$$

$$=\int\limits_0^a r\,dr\int\limits_{-\frac12\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac12\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

№3950 Изменить пределы интегрирования $\int\limits_0^a d\varphi\int\limits_0^{\varphi} f(\varphi,r)\,dr$ $(0<a<2\pi)$

$$\begin{cases} 0\le\varphi\le a \\ 0\le r\le\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le r\le a \\ r\le\varphi\le a \end{cases} \Rightarrow$$



$$\int\limits_0^a d\varphi\int\limits_0^{\varphi} f(\varphi,r)\,dr=\int\limits_0^a dr\int\limits_r^a f(\varphi,r)\,d\varphi.$$

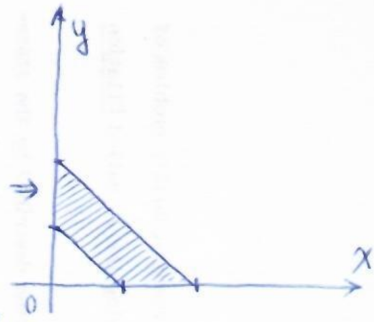
№3955 Вычислить $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases} \begin{cases} 0\le\varphi\le2\pi \\ \pi\le r\le2\pi \end{cases} \Rightarrow \iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\pi}^{2\pi} r\sin r\,dr=$$

$$=2\pi\int\limits_{\pi}^{2\pi} r\sin r\,dr=-2\pi r\cos r\Big|_{\pi}^{2\pi}+\overset{0}{\cancel{\int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos r\,dr}}=(-2\pi)(2\pi+\pi)=-6\pi^2.$$

№3958 Определить пределы интегрирования $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

Замена переменных $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \Rightarrow$



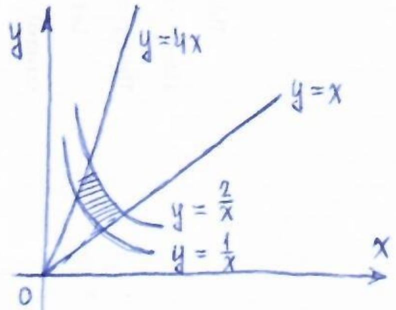
$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1-x \le y \le 2-x \Rightarrow 1 \le x+y \le 2 \Rightarrow 1 \le u \le 2. \\ 0 \le x \le 2 \Rightarrow 0 \le \dfrac{u+v}{2} \le 2 \Rightarrow -u \le v \le 4-u \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ -u \le v \le 4-u \end{cases} \quad и \quad I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x,y)\,dy = \frac{1}{2} \int\limits_1^2 du \int\limits_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv .$$

№3964. Свести двойной интеграл к однократному $\iint\limits_\Omega f(xy)\,dxdy$, где область Ω ограничена кривыми $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$, $x>0$, $y>0$.

Замена переменных:



$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{uv} \\ x = \sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{v}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v} \Rightarrow$$

$$\iint\limits_\Omega f(xy)\,dxdy = \frac{1}{2} \int\limits_1^2 du \int\limits_1^4 \frac{f(u)}{v} dv = \frac{1}{2} \int\limits_1^2 f(u)\,du \cdot \ln v \Big|_1^4 = \ln 2 \int\limits_1^2 f(u)\,du .$$

№3965 Вычислить интеграл $\iint\limits_\Omega (x+y)\,dxdy$, где область Ω ограничена линией $x^2+y^2 = x+y$.

Сделаем замену переменных: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \cos\varphi + \sin\varphi \Rightarrow r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \ge 0 \Rightarrow \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \ge 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4} \\ 0 \le r \le \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow x+y = \sqrt{2}\, r\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\iint\limits_\Omega (x+y)\,dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})} \sqrt{2}\, r^2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) dr = \sqrt{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})} r^2 dr =$$

$$= \frac{4}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^4\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = \frac{4}{3} J, \ где \ J = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^4\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow$$

$$\iint_{\Omega} (x+y)\,dx\,dy = \frac{4}{3}\cdot\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл J был вычислен ранее в примере № 3972.

№3968. Вычислить $\iint\limits_{x^4+y^4\le 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = 4\iint\limits_{\substack{x^4+y^4\le 1\\ x\ge 0,\, y\ge 0}} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$

$$= \left| \begin{cases} x = r\cos^{\frac{1}{2}}\varphi \\ y = r\sin^{\frac{1}{2}}\varphi \end{cases}, \begin{cases} 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le r\le 1 \end{cases} \quad I = \frac{1}{2} r\cos^{-\frac{1}{2}}\varphi\,\sin^{-\frac{1}{2}}\varphi \right| =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{2} r\cos^{-\frac{1}{2}}\varphi\,\sin^{-\frac{1}{2}}\varphi\,(r^2\cos\varphi + r^2\sin\varphi)\,dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\,d\varphi \int_0^1 r^3\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\varphi-\frac{\pi}{4})\,d\varphi}{\sqrt{\cos(2\varphi-\frac{\pi}{2})}} = \left| z = \sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right) \right| = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1-2z^2}} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1-(\sqrt{2}z)^2}} =$$

$$= \left| u = \sqrt{2}z \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin u \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

№3963 (Добавление)

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = \dfrac{au - bv}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = \dfrac{bu + av}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = u^2+v^2 \le 1$$

$$I = 1. \Rightarrow$$

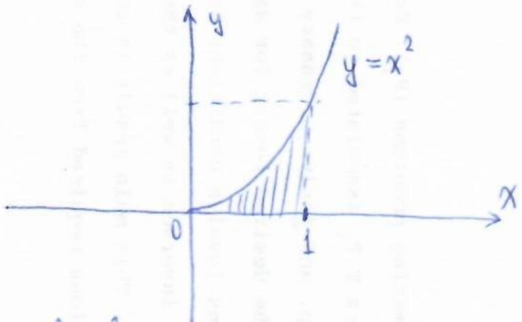
$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\,u+c)\,dv =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\, f(\sqrt{a^2+b^2}\,u+c)\,du.$$

Добавление: №№ 3946, 3948

№3946 Расставить пределы интегрирования в $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$$



$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \le r \le \frac{1}{\cos\varphi} \end{cases}$$ левое огран. $y = x^2$, прав. огран. $x = 1$.

$$r\sin\varphi = r^2\cos^2\varphi \Rightarrow \sin\varphi = r(1-\sin^2\varphi) \Rightarrow$$

$$r\sin^2\varphi + \sin\varphi - r = 0$$

$$D = 1 + 4r^2 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{-1+\sqrt{1+4r^2}}{2r}.$$

$$r\cos\varphi = 1 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{r} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{r}.$$

$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r} \end{cases}$$

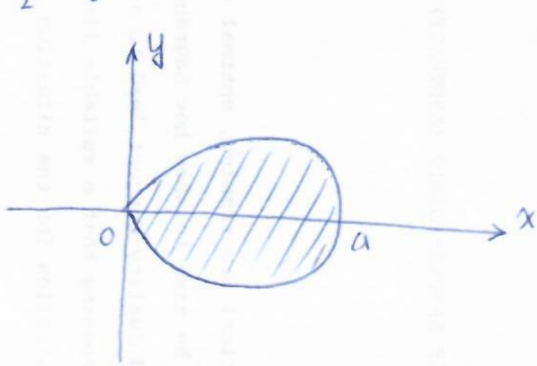
$$\begin{cases} 1 \le r \le \sqrt{2} \\ \arccos\frac{1}{r} \le \varphi \le \arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r} \end{cases}$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr =$$

$$= \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_1^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

№3948 Изменить порядок интегрирования в $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)\,dr$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le a\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r \le a \\ -\arccos\frac{r}{a} \le \varphi \le \arccos\frac{r}{a} \end{cases}$$



$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)\,dr = \int\limits_0^a dr \int\limits_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi, r)\,d\varphi.$$

3968 Вычислить $I = \iint\limits_{x^4+y^4 \leq 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy$

Используем переход в полярную систему координат.

$$I = 4 \iint\limits_{\substack{x^4+y^4 \leq 1 \\ x \geq 0,\, y \geq 0}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^{-\frac{1}{4}}} r^3\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} =$$

$$x^4+y^4=1 \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{2-\sin^2 2\varphi} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{2-\sin^2 2\varphi} + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{2-\sin^2 2\varphi} =$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\sin^2 2\varphi + 2\cos^2 2\varphi} = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\operatorname{tg}^2 2\varphi + 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 2\varphi} = \{t = \operatorname{tg} 2\varphi\} =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$